Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 16, pp 1849–1862. Pergamon Press 1973. Printed in Great Britain

DETERMINATION EXPERIMENTALE DU NOMBRE DE PRANDTL TURBULENT PRES D'UNE PAROI LISSE

CHE PEN CHEN

Laboratoire de Mécanique Expérimentale des Fluides, Institut de Mécanique Théorique et Appliquée, Université de Paris VI, Paris, France

(*Reçu le* 1 *Fevrier* 1973)

Résumé—De nouvelles mesures ont été entreprises pour déterminer expérimentalement le profil de températures près d'une paroi lisse chauffante dans l'eau en écoulement turbulent. Grâce à un équipment perfectionné (voltmètre très sensible à $\pm 1\ \mu V$, et enregistrement rapide à intervalles de temps réguliers), de résultats statistiquement probants sont obtenus.

Ils confirment la répartition semi-logarithmique de températures avec le coefficient A plus petit que celui de la répartition de vitesses.

D'où $Pr_t = 0{,}885$ environ.

Ils montrent en outre que la zone d'intermittence de la couche limite thermique turbulente s'étend assez près de la paroi ($y < 10$ mm).

NOTATIONS

x, y, z,	coordonnés du système cartésien;
$0x$,	placé suivant la plaque dans le sens de l'écoulement;
y,	distance à la paroi;
u, v, w,	composantes du vecteur vitesse V suivant les 3 axes;
u', v', w',	fluctuations de ces composantes à l'instant t;
t,	temps;
T,	température;
g,	accélération de la pesanteur;
ρ,	masse volumique du fluide;
μ,	viscosité dynamique;
ν,	viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$;
λ,	conductivité du fluide;
C_p,	chaleur spécifique à pression constante;
p,	pression;
h,	cote du point considéré;
φ_0,	densité du flux;
θ,	différence de température avec celle de la paroi $\theta = T_p - T$.

Les indices 0 s'appliquent à toutes les grandeurs pour $y = 0$, les indices 1 à celles pour $y = \infty$, et les indices p à celles de la paroi. Les grandeurs surlignées sont les moyennes dans le temps.

I. INTRODUCTION

LE PRÉSENT mémoire n'est que le prolongement du travail déjà publié ici même sous la référence [1].

Nos hypothèses de base restent les mêmes:

(1) l'écoulement est turbulent, fluctuant, et permanent en moyenne, sur plaque plane lisse chauffée modérément,

(2) $(T_p - T_1)$ est petit devant T_1, tel que l'on peut négliger les variations des caractéristiques physiques (λ, ρ, μ) du fluide.

En admettant que dans une couche limite, les dérivées portant sur des moyennes par rapport à x sont négligeables devant les dérivées par rapport à y portant sur ces mêmes moyennes, ainsi que les dérivées secondes, les deux équations dynamique et thermique se retrouvent sous leur forme respective ci-dessous

$$\rho\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) = \frac{\partial[\mu(\partial \bar{u}/\partial y) - \rho\overline{u'v'}]}{\partial y} \qquad (5)$$

$$\rho C_p\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}\right) = \frac{\partial[\lambda(\partial \bar{\theta}/\partial y) - \rho C_p\overline{\theta'v'}]}{\partial y}. \qquad (6)$$

B

Elles sont indépendantes l'une de l'autre, sur la base de l'hypothèse (2), mais présentent une analogie telle que l'on puisse imaginer des solutions semblables.

II. PROFILS DE VITESSES ET DE TEMPERATURES PRES D'UNE PAROI LISSE

Ecrivons d'abord les conditions aux limites

(1) $y = 0 \quad \bar{u} = 0 \quad T = T_p \quad \bar{\theta} = 0$

(2) $\delta \leqslant y \quad \bar{u} = U_1 \quad T = T_1$

$$\bar{\theta} = \theta_1 = T_p - T_1.$$

En introduisant les variables adimensionnelles $y_+ = yu_*/\nu$, $u_+ = u/u_*$, $\theta_+ = \theta/\theta_*$ avec $u_* = \sqrt{(\tau_0/\rho)}$ et $\theta_* = \varphi_0/(\rho C_p u_*)$, les profils de vitesses et de températures près d'une paroi s'écrivent

	Couche limite dynamique	Couche limite thermique
(1) $0 \leqslant y_+ \leqslant 5$	Zone de film laminaire ou de film visqueux	Zone de conduction
	(7) $\bar{u}_+ = y_+$ avec $\left(\dfrac{\partial \bar{u}_+}{\partial y_+}\right)_0 = 1$	$\bar{\theta}_+ = Pr\, y_+$ avec $\left(\dfrac{\partial \bar{\theta}_+}{\partial y_+}\right)_0 = Pr$
(2) $6 \leqslant y_+ \leqslant 25$	Zone transitoire ou intermédiaire	
	(8) $\bar{u}_+ = g(y_+)$	$\bar{\theta}_+ = f(Pr, y_+)$
(3) $26 \leqslant y_+$	Zone semi-logarithmique	
	(9) $\bar{u}_+ = A \log y_+ + B$	$\bar{\theta}_+ = A_\theta \log y_+ + B_\theta.$

La répartition de vitesses près d'une paroi lisse est bien connue, grâce à de nombreuses expériences depuis Nikuradsé, et celle de températures, obtenue par l'analogie, l'est moins. Mais quelques remarques s'imposent:

(1) A est une fonction de *Re*, mais varie peu et très lentement. Aux très grands nombres de Reynolds, $A = 5{,}6$ environ. Quant à B, il dépend de la forme de la section. Sa valeur se situe aux environs de 5, quand il s'agit d'un conduit cylindrique circulaire.

(2) A_θ est une fonction de *Re* et de *Pr*, tandis que B_θ dépend beaucoup plus de *Pr* que de la forme de la section. Pendant longtemps, on a cru que par l'analogie de Reynolds, A et A_θ avaient la même valeur numérique. Mais les expériences faites avec de différents fluides, montrent qu'il n'en est pas ainsi en général.

Notons tout de suite que le profil de vitesses près d'une paroi suit les lois universelles, tandis que celui de températures dépend avant tout de *Pr*.

(3) Les frontières séparant ces trois zones ne sont pas établies d'une façon nette et précise.

Citons par exemple que d'après de nombreux expérimentateurs, la zone de film laminaire de la couche limite dynamique s'étend pratiquement jusqu'à $y_+ = 7{,}5$, tandis que la zone intermédiaire, à $y_+ = 30$.

Quant à la couche limite thermique, ces mêmes valeurs de y_+ restent probablement valables, quand *Pr* est voisin de 1. Car les deux couches limites (dynamique et thermique) n'ont pas la même épaisseur, quand *Pr* est différent de 1. D'après Pohlausen, leur rapport est de $\delta/\delta_T = Pr^{\frac{1}{3}}$ en régime laminaire. Citons le cas de métaux liquides (Pr très petit): d'après les expériences, la zone de conduction s'étend jusqu'à $y_+ Pr = 1$, et la zone semi-logarithmique ne commence qu'à partir de $y_+ Pr = 11{,}7$. On voit ici la complexité du problème thermique.

(4) Il ne faut pas perdre de vue sur la grandeur réelle de y qui est de l'ordre de 0,1 à 0,3 mm pour $Re \# 200.000$ quand $y_+ = 5$, ce qui explique les difficultés de l'exploration expérimentale dans ces zones.

III. DIFFUSIVITES

Revenons aux équations (5) et (6), dont les seconds membres sont composés tous deux de 2 termes: les premiers termes représentent en fait la diffusion moléculaire, et les seconds, la diffusion turbulente (de quantité de mouvement pour l'équation dynamique, et de chaleur pour l'équation de l'énergie).

Si la diffusion moléculaire constitue l'une des propriétés physique du fluide, la diffusion turbulente est par contre beaucoup plus complexe, et liée à la turbulence elle-même [2].

Désignons maintenant

$$\epsilon_M = -\frac{\overline{u'v'}}{(\partial\bar{u}/\partial y)} \quad \text{et} \quad \epsilon_H = -\frac{\overline{\theta'v'}}{(\partial\bar{\theta}/\partial y)}$$

respectivement sous les noms de diffusivité turbulente de quantité de mouvement (ou quelquefois de viscosité turbulente) et de diffusivité thermique turbulente.

Le rapport de ces deux diffusivités est appelé couramment le "Nombre de Prandtl turbulent".

$$Pr_t = \frac{\epsilon_M}{\epsilon_H}. \tag{10}$$

A l'origine, pour établir une base théorique de la loi semi-logarithmique de répartition de vitesses, Prandtl a introduit la notion de longueur de mélange l en posant

$$-\overline{u'v'} = l^2 \left|\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right| \cdot \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} \qquad \text{avec} \quad l = ky.$$

Il obtint ainsi

$$\bar{u}_+ = \frac{1}{k}\log_e y_+ + B \tag{11}$$

où k est la Constante Universelle de Von Kármán, qui emprunta une hypothèse un peu différente mais plus générale, pour arriver au même résultat. D'après les travaux de Prandtl–Nikuradse, $k = 0{,}40$ et $B = 5{,}1$. Il suffit ensuite identifier les équations (9) et (11) pour obtenir la valeur numérique de A, ce qui fait:

$$A = \frac{2{,}3}{k} = 5{,}75.$$

Mais plus récemment à Stanford [3], on a adapté le valeurs suivantes: $k = 0{,}41$ et $B = 5$, ce qui correspond à $A = 5{,}61$. D'après leurs auteurs, ces dernières, obtenues par un recensement de nombreuses expériences plus récentes, répondent mieux localement (sur un point de la paroi) à la répartition de vitesse et à sa perte de charge, tandis que celles de Nikuradse proviennent des essais dans les conduits circulaires.

Pour le transfert thermique, Prandtl a préconisé d'utiliser cette même longueur de mélange l en posant simplement

$$-\overline{\theta'v'} = l^2 \left|\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right| \cdot \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y} \qquad \text{avec } l = ky.$$

On retombe alors sur l'analogie de Reynolds, qui ne peut être valable dans les conditions générales. Malheureusement cette longueur de mélange l n'est pas une grandeur physique facilement mesurable.

Cependant, avec l'utilisation de fil chaud pour les mesures de vitesses, un nombre considérable de travaux expérimentaux ont été effectués sur les tensions de Reynolds. Par contre, les mesures directes de $\overline{\theta'v'}$ sont rares [4]. La meilleure façon d'aborder ce problème reste d'explorer le profil de températures près de la paroi par la voie expérimentale.

Enfin, on peut supposer que les deux diffusions turbulentes suivent le même processus, mais que les deux longueurs de mélange l et l_θ sont différentes en valeur numérique. Ainsi

$$-\overline{\theta'v'} = l l_\theta \left|\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right| \cdot \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y} \qquad \text{avec } l_\theta = k_\theta y.$$

D'où finalement

$$Pr_t = \frac{\epsilon_M}{\epsilon_H} = \frac{l}{l_\theta} = \frac{k}{k_\theta} = \frac{A_\theta}{A}. \qquad (12)$$

IV. ETUDE EXPERIMENTALE

L'installation des essais n'a pas changé [1]: canal vitré de section rectangulaire où l'écoulement est à surface libre avec l'eau, et dont les 5 plaques de cuivre de 60 cm de long chacune, chauffées par les résistances électriques placées au dessous, constituent partie du fond côté Aval (Fig. 1).

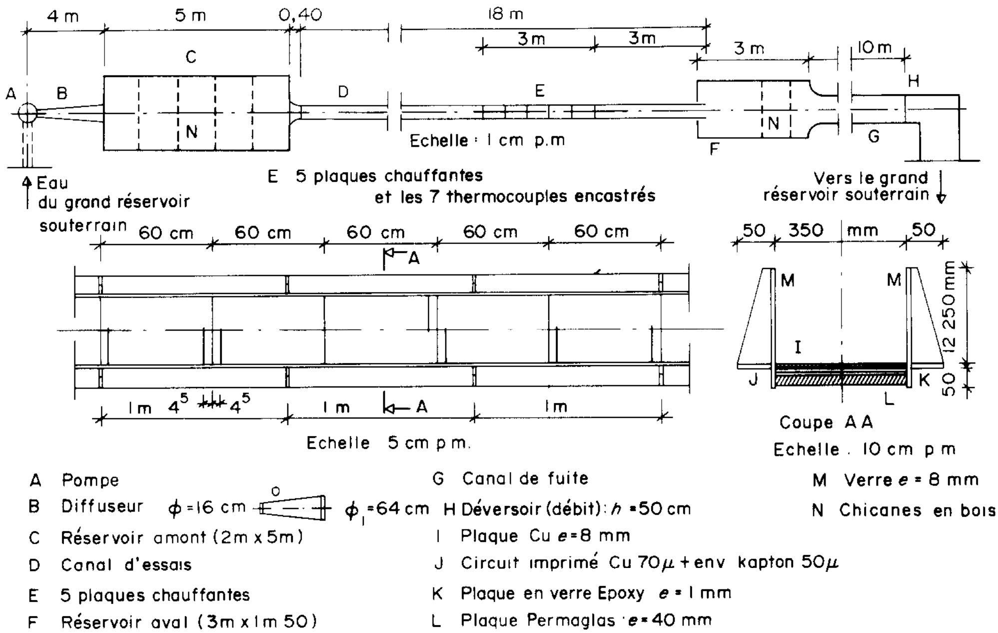

FIG. 1. Plan du canal d'essais.

Les anciennes résistances ont été remplacées par les nouveaux circuits imprimés souples "Flexprint" en Kapton 50 microns, Cuivre 70 microns, dont les résistances sont de

1,13 1,147 1,145 1,145 1,143

en Ohms aux environs de 20°C.

Quant à l'équipement de mesure, un seul changement important est intervenu en ce qui concerne le système de l'exploration du profil de température: le galvanomètre a été abandonné au profit d'un voltmètre Solartron, sensible à $\pm 1\ \mu$V, et muni d'un enregistrement rapide par machine à écrire, avec minuterie. Ce système a le double avantage d'éviter l'étalonnage préalable des thermocouples utilisés, et d'obtenir en même temps des moyennes statistiques de grande série. Les thermocouples en Cu et Constantin ont été remplacés par d'autres en Chromel et Alumel, ceci pour la simple raison de commodité.

Dans les 3 séries de résultats ci-jointes en annexes, nous indiquerons d'abord les caractéristiques de l'écoulement, du chauffage, ainsi que la température T_1 de l'eau hors de la couche limite thermique, avec leurs variations dans le temps.

Ces mesures ne commencent qu'après une stabilisation de marche de 6 h environ. On peut constater que le régime hydraulique de l'écoulement est très stable, que le flux électrique varie de 2 pour cent au maximum entre les 5 plaques chauffées, et de 1 pour mille environ dans le temps pour une même plaque, et enfin que la température T_1 de l'eau varie au cours des mesures de 0,1 à 0,2 °C seulement. Ainsi nos hypothèses de départ sont scrupuleusement respectées.

Les enregistrements des différences de températures $T_p - T_1$, $T_p - T$ et $T - T_1$ sont effectués dans ce cycle avec un intervalle de temps régulier de 2 s environ, pour une centaine de fois en chaque point, et ceci successivement en une dizaine de points situés sur l'axe vertical de symétrie de la section de mesure. Pour chacune de ces séries, leurs moyennes statistiques sont exposées ci-dessous avec le maximum et le minimum enregistrés. La distance y à la paroi chauffante de ces points est contrôlée de la même façone que précédemment.

En effet, bien que la température T soit une fonction aléatoire en chaque point, la somme des 2 moyennes $(T_p - T)$ et $(T - T_1)$ doit être égale à la moyenne de $(T_p - T_1)$ par mesure directe, puisque l'on est en régime permanent. L'écart maximal constaté entre ces 2 valeurs est de l'ordre de 2 µV (soit 0°,05 C), tandis que la moyenne de $(T_p - T_1)$ par mesure directe des points, oscille elle-même autour d'une moyenne générale pour l'ensemble des points, avec une fluctuation de ± 1 pour cent environ au maximum (0°,05 C). Etant donné la limite de précision du voltmètre Solartron utilisé à ± 1 µV, et la durée des mesures (4–5 h pour l'ensemble des points), le résultat ainsi obtenu peut être considéré comme très satisfaisant.

Pour établir correctement le profil de température près de la paroi chauffante, il est alors nécessaire de prendre comme base cette moyenne générale de $(T_0 - T_1)$ pour l'ensemble des points, et de procéder à une petite correction sur la moyenne de $(T_p - T)$ obtenue en chaque point. Pour cela, il suffit simplement de répartir la différence entre cette moyenne générale de $(T_p - T_1)$ pour l'ensemble des points et la somme des 2 moyennes $(T_p - T)$ et $(T - T_1)$ en chaque point considéré, par moitié sur chacune de ces deux dernières. C'est ainsi que nous obtenons $(T_p - T)$ corrigé en chaque point.

Par la suite, il est facile de calculer les deux variables adimensionnelles y_+ et θ_+. La représentation graphique nous donnera alors la fonction semi-logarithmique suivante:

$$\bar{\theta}_+ = A_\theta \log_{10} y_+ + B_\theta$$

avec

Série	A_θ	B_θ	Re	Pr	
A	4,85	50,9	284.000 263.400	6,76 7,37	à la paroi loin de la paroi
B	4,95	52	307.800 278.400	6,14 6,93	à la paroi loin de la paroi
C	5,1	49,6	299.500 276.500	6,33 6,92	à la paroi loin de la paroi

D'où $Pr_t = 0{,}885$ environ.

Il reste à préciser que:

(1) une augmentation de résistances des circuits imprimés a été constatée lors du chauffage. Elle est de 13 pour cent en moyenne pour un flux de 1,2 W/cm² (Séries A et C) et de 17 pour cent pour celui de 1,7 W/cm² (Série B). Ainsi il est possible d'évaluer approximativement les élévations de températures de ces circuits imprimés provoquées par le passage du courant électrique. En fait, elles sont égales aux différences de températures entre les circuits imprimés chauffés et à la température de l'atmosphère ambiante. Comme la résistivité de Cu augmente de 0,003 par degré C, ces différences sont de 43° et de 57° respectivement.

Les coefficients de conductivité thermique des deux plaques isolantes au dessous étant de 0,003 W/cm/°C pour celle en verre Epoxy épaisse de 1 mm, et de 0,005 pour celle en Permaglas épaisse de 4 cm, les pertes d'énergie au travers de ces 2 plaques se calculent facilement

$$\text{Séries A et C:} \frac{43}{(0{,}1/0{,}003) + (4/0{,}005)}$$

$$= \frac{43}{833} = 0{,}051 \text{ W/cm}^2$$

$$\text{Série B:} \frac{57}{(0{,}1/0{,}003) + (4/0{,}005)}$$

$$= \frac{57}{833} = 0{,}068 \text{ W/cm}^2.$$

Comme il existe encore une enveloppe de 50 μ en Kapton sur ces circuits imprimés, la perte d'énergie peut être évaluée globalement à 3 pour cent du flux électrique fourni.

(2) Les valeurs numériques de A_θ et de B_θ ci-dessus sont obtenues en tenant compte de cette perte de 3 pour cent d'énergie, tandis que u_* a été déterminé préalablement par les mesures de répartitions de vitesses près de la paroi chauffante sur la même verticale.

(3) Le lissage des points expérimentaux par la machine à calculer donne à la ligne droite en coordonnées semi-logarithmiques une pente (A_θ) légèrement plus forte et la constante (B_θ) un peu plus faible. Compte tenu des points situés en deçа de $y_+ = 30$, les valeurs de A_θ et de B_θ obtenues ci-dessus par la représentation graphique sont préférables (Fig. 2).

(4) Le thermocouple qui sert à l'établissement du profil de températures près de la paroi chauffante, a une soudure applatie de 60 μ d'épaisseur, tandis que celui qui s'immobilise dans l'eau près de la surface libre de température de référence T_1, est un simple thermocouple "thermocoax" de $\phi = 1$ mm (Fig. 3).

V. CONCLUSION

(1) Ces essais confirment le résultat obtenu précédemment par nous [1], mais avec une rigueur sans comparaison, puisqu'il s'agit des moyennes statistiques sur 100 mesures et cela sans étalonnage préalable des thermocouples.

(2) Nous avons pris ici comme température de référence T_1, température de l'eau loin de la paroi chauffante, ceci simplement parce qu'elle est facile à mesurer avec une grande précision. Pour obtenir T_p, température de la paroi, il suffit d'y ajouter ($T_p - T_1$).

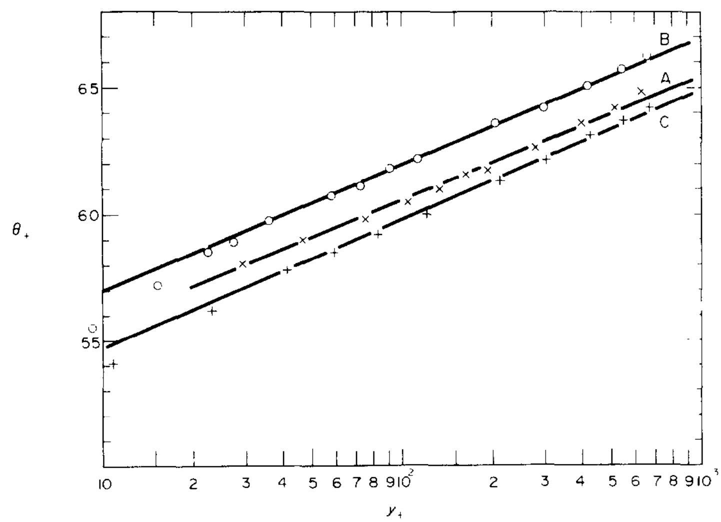

FIG. 2. Profils de températures près de la paroi.

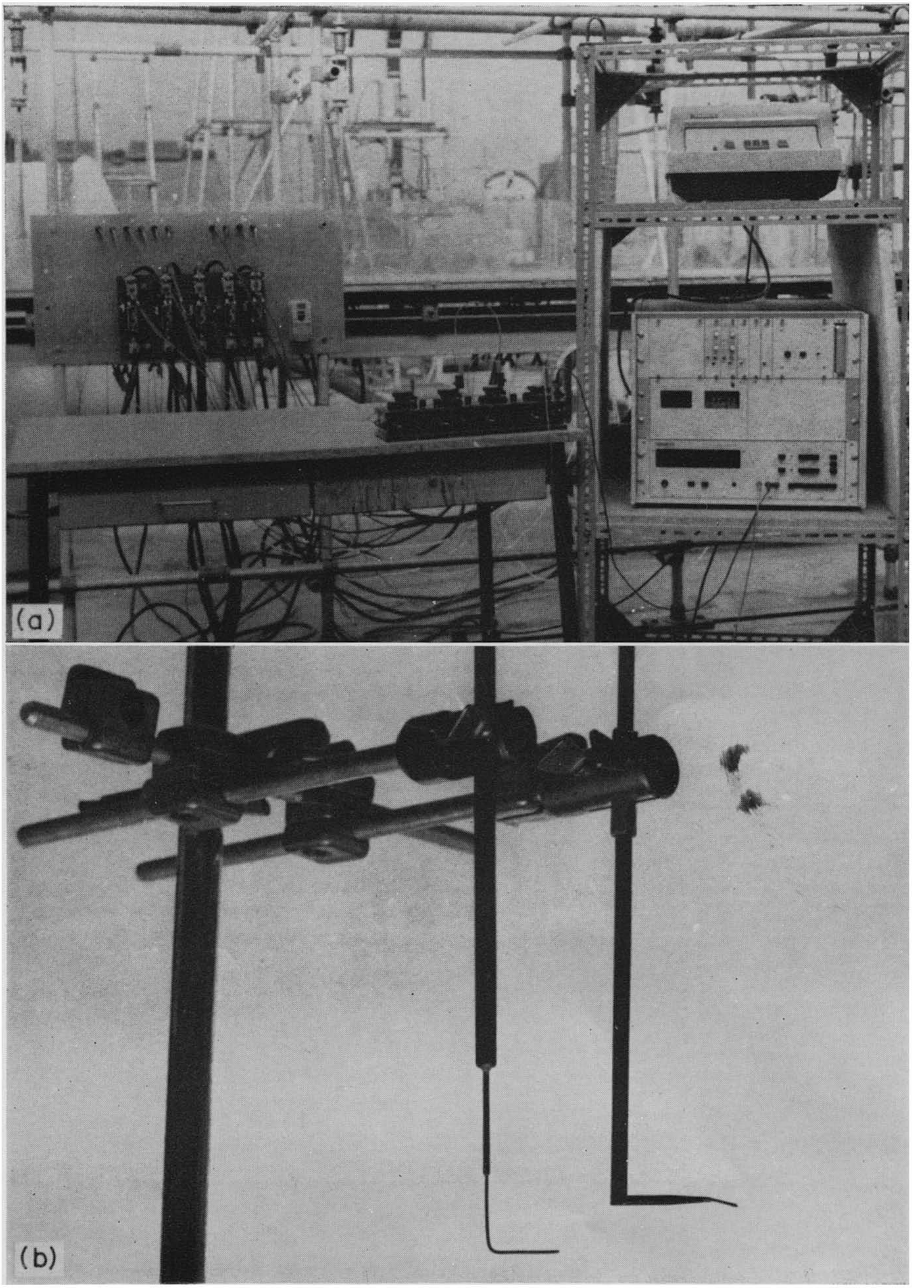

FIG. 3. En haut: Voltmètre Solartron avec son équipement d'enregistrement et l'imprimante ADDO.
En bas: Thermocouples "Thermocoax" $\phi = 1$ mm et soudure applatie de $60\,\mu$.

Si la variation des autres propriétés physiques de l'eau reste négligeable, la viscosité varie de 10 pour cent environ entre les deux limites. Cependant cette variation est très forte dans la zone de conduction, et son influence est pratiquement imperceptible sur le profil de températures dans la zone semi-logarithmique.

Par contre, dans la zone de conduction, le Nombre de Prandlt Pr croît fortement à l'inverse de μ, et $\bar{\theta}_+$ ne sera plus représenté par une ligne droite en fonction (linéaire) de y_+ ; et à l'extrémité de cette zone, il existe bien le point d'inflexion que nous avons signalé précédemment [1].

L'épaisseur de la zone de conduction est de l'ordre de 0,08 mm pour nos essais.

(3) Si on examine attentivement les valeurs minimum de $(T_p - T_1)$ et de $(T - T_1)$ en comparison du maximum de $(T_p - T)$, on peut penser que les points situés même un peu au dessous de $y = 10$ mm pourraient se trouver dans la zone d'intermittence de la couche limite thermique turbulente.

(4) La répartition de températures le long de l'axe longitudinal du canal a été étudiée dans la série A. On peut constater simplement que le coefficient de transfert h et le Nombre de Margoulis Ms (ou de Stanton) décroissent rapidement au début, tandis que les joints même très minces jouent le rôle de redresseurs.

(5) Signalons enfin les travaux récents de J. Blom et de J. G. Richard [4, 5]. D'après le premier qui effectuait ses essais avec l'air sur une plaque plane, le Nombre de Prandtl turbulent Pr_t varie d'une section à l'autre le long de l'axe longitudinal. Mais il semble que sa plaque chauffante est un peu courte (de 75 cm de long au total) et formée de 15 éléments de 5 cm chacun. Quant au second, ses essais ont été effectués dans un conduit circulaire avec l'eau. Ses résultats montrent que le coefficient A_θ égal à 21,72 pour $Re = 16\,000$, décroît rapidement à l'invers de Re et tend vers une limite de 4,55 pour $Re \geqslant 82\,000$, avec un macimum de Re de l'ordre de 215000. Remarquons que le Nombre de Prandtl de ses essais est nettement plus petit ($Pr_t = 4{,}7$). Mais, pour les Nombres de Reynolds de même ordre, l'écart sur A_θ reste de 8 pour cent entre lui et l'auteur.

REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur le Professeur A. Fortier pour les conseils qu'il m'a donnés au cours de cette étude que j'ai effectuée sous sa direction.

REFERENCES

1. C. P. Chen, Etude expérimentale de la couche limite thermique turbulente dans l'eau, *Int. J. Heat Mass Transfer* **12**, 61–70 (1969).
2. A. Fortier, Rapport Général sur le "Problème de transfert dans les écoulements de liquides", 14e Congrès International de la Recherche Hydraulique, Paris (September 1971).
3. D. E. Coles et E. A. Hirst, Proceedings of Computation of Turbulent Boundary Layer, AFOSR-IFP-Stanford Conference, 18–25, August (1968).
4. J. Blom, An experimental determination of the turbulent Prandtl Number in a developing temperature boundary layer, Thesis, Technological University, Eindhoven, The Netherlands (May 1970).
5. Jean-Guy Richard, Etude des profils de température dans un écoulement turbulent établi dans un tube cylindrique lisse, Thèse Docteur Ingénieur, Université Paris VI (Janvier 1972).

APPENDICE

Série A

Caractéristiques de l'écoulement et du chauffage

Le débit: $q_v = 34{,}3$ l./s

Le flux: $\varphi_0 = 1{,}265$ W/cm^2

Les propriétés physiques

à la paroi: $\mu_0 = 0{,}972 \,.\, 10^{-2}$ poises

$\nu_0 = 0{,}974 \,.\, 10^{-2}$ stokes

$\lambda_0 = 1{,}438 \,.\, 10^{-3}$ cgs

hors de la couche limite thermique:

$\mu_1 = 1{,}048 \,.\, 10^{-2}$

$\nu_1 = 1{,}05 \,.\, 10^{-2}$

$\lambda_1 = 1{,}421 \,.\, 10^{-3}$

La profondeur d'eau: $y = 7{,}28$ cm

Le diamètre hydraulique: $D_H = 20{,}56$ cm

La vitesse débitante: $U = 134{,}5$ cm/s

Le Nombre de Reynolds: $Re_0 = 284\,000$ à la paroi

$Re_1 = 263\,400$ hors de la c.l. therm.

Le Nombre de Prandtl: $Pr_0 = 6{,}76$

$Pr_1 = 7{,}37$

$A = 0{,}0165$

$u_* = 6{,}11$ cm/s

$T_1 = 18°, 12$ C

	A		V		
Plaque 1:	45,31	×	57,02	= 2583 W	au début des mesures
2:	44,00	×	58,87	= 2590	
3:	44,92	×	57,81	= 2597	
4:	45,22	×	58,50	= 2645	
5:	45,24	×	58,62	= 2652	

$T_1 = 18°, 27$ C
Plaque 1: 45,36 × 57,03 = 2587 W à la fin des mesures
2: 44,01 × 58,88 = 2591
3: 44,97 × 57,81 = 2600
4: 45,26 × 58,51 = 2648
5: 45,28 × 58,64 = 2655
$T_p - T_1 = 3°, 279$ C

y_{mm}	(1) $T_p - T_1$		(2) $T_p - T$		(3) $T - T_1$		(2) + (3)
10,80	130,89*		123,51*		5,76*		129,27
		136†		127†		14†	
		128‡		118‡		2‡	
8,80	130,55		121,83		6,52		128,35
		133		126		12	
		127		116		2	
6,80	130,09		120,55		7,41		127,96
		133		126		13	
		127		115		4	
4,80	129,68		119,04		9,53		128,57
		133		123		17	
		127		114		6	
2,80	130,88		117,70		12,44		130,14
		135		123		16	
		126		113		8	
1,80	131,71		116,06		14,81		130,87
		139		120		23	
		127		112		11	
0,80	131,24		113,49		17,95		131,44
		136		119		24	
		128		110		13	
0,50	131,46		111,37		19,70		131,07
		136		116		30	
		128		103		15	
3,30	132,04		118,65		12,67		131,32
		137		123		21	
		129		113		9	
2,30	131,59		116,99		13,91		130,90
		136		122		19	
		128		113		10	
1,30	132,49		114,78		16,42		131,20
		138		120		22	
		129		109		11	
	1.442,62	11					1.431,09: 11
Moyenne Générale:	131,15						130,10

* Moyenne de 100 mesures en μV.
† Maximum enregistré en μV parmi les 100 mesures.
‡ Minimum enregistré en μV parmi les 100 mesures.

y_+	y_{mm}	$T_p - T_{mesuré}$	$T_p - T_{corrigé}$	θ_+	$\theta_{+\,corrigé}$‡
632	10,80	3°088 C	3°111 C*	62,9	64,85
514	8,80	3,046	3,081	62,3	64,2
398	6,80	3,014	3,054	61,7	63,6
280	4,80	2,976	3,008	60,8	62,65
164	2,80	2,942	2,955	59,75	61,6
105	1,80	2,901	2,905	58,7	60,5
46,8	0,80	2,837	2,833	57,25	59
29,3	0,50	2,784	2,785†	56,3	58,05
193	3,30	2,966	2,964	59,9	61,75
134,5	2,30	2,925	2,928	59,2	61
76	1,30	2,869	2,869	58	59,8

* $T = 18°438\,C$ et $\nu = 1{,}05 . 10^{-2}$ stokes
† $T = 18°764\,C$ et $\nu = 1{,}04 . 10^{-2}$ stokes
d'où on prendra une valeur moyenne de $\nu = 1{,}045\ 10^{-2}$ stokes pour le calcul de y

$T_p - T_1 = 3°279$ C $\qquad T_1 = 18°27$ C
$T_p = 21°549$ C

‡ $\theta_{+\,corrigé}$ est obtenu en tenant compte de la perte d'énergie de 3 pour cent sur φ_0.

Répartition de températures le long de l'axe longitudinal du canal

Plaque	x (cm)	Thermo-couple	$T_p - T_1$		en degré C	U (cm/s)	W/cm²	h	M_s
1	5,5	1	104,15*		2,604	131,9	1,232	0,473	0,856 10^{-3}
				107†					
				102‡					
1	54,5	2	128,55		3,214	132,3	1,232	0,383	0,692 10^{-3}
				132					
				126					
2	65,5	3	123,61		3,090	132,3	1,235	0,4	0,722 10^{-3}
				128					
				121					
3	174,5	4	123,88		3,097	133,4	1,238	0,4	0,716 10^{-3}
				129					
				122					
4	185,5	5	—	—	ce thermocouple est hors d'usage	—	—	—	—
5	245,5	6	129,95		3,249	134,2	1,265	0,39	0,693 10^{-3}
				133					
				127					
5	295,5	7§	132,49		3,312	134,5	1,265	0,382	0,678 10^{-3}
				138					
				129					

* Moyenne de 100 mesures en μV.
† Maximum enregistré en μV parmi les 100 mesures.
‡ Minimum enregistré en μV parmi les 100 mesures.
§ Section de mesures.

$$h = \frac{\varphi_0}{T_p - T_1} \text{ en W/cm}^2/°\text{C}$$

$$M_s = \frac{\varphi_0}{\rho C_p U (T_p - T_1)} \text{ Nombre de Margoulis}$$

Caractéristiques de l'écoulement et du chauffage

Le débit: $q_v = 34{,}2$ l./s
Le flux: $\varphi_0 = 1.698$ W/cm²
Les propriétés physiques
à la paroi: $\mu_0 = 0{,}894 . 10^{-2}$ poises
$\nu_0 = 0{,}897 . 10^{-2}$ Stokes
$\lambda_0 = 1{,}455 . 10^{-3}$ cgs
hors de la couche limite thermique:
$\mu_1 = 0{,}993 . 10^{-2}$
$\nu_1 = 0{,}995 . 10^{-2}$
$\lambda_1 = 1{,}433 . 10^{-3}$

Série B

La profondeur d'eau: 7,18 cm
Le diamètre hydraulique: $D_H = 20{,}36$ cm
La vitesse débitante: $U = 136$ cm/s
Le Nombre de Reynolds: $Re_0 = 307800$ à la paroi
$Re_1 = 278400$ hors de la c.l. therm.
$\Lambda = 0{,}0158$
$u_* = 6{,}05$ cm/s
Le Nombre de Prandtl: $Pr_0 = 6{,}14$ à la paroi
$Pr_1 = 6{,}93$ hors de la c.l. therm.

T_1 = 20,22 C Plaque 1: 3507 W au début des mesures
2: 3475
3: 3506
4: 3553
5: 3562

T_1 = 20,58 C Plaque 1: 3511 W à la fin des mesures
2: 3480
3: 3513
4: 3557
5: 3565

y_{mm}	(1) $T_p - T_1$	(2) $T_p - T$	(3) $T - T_1$	(2) + (3)
10,85	179,63*	172,76*	8,55*	181,31
	186†	181†	16†	
	174‡	165‡	4‡	
8,85	178,22	171,41	9,39	180,80
	183	177	18	
	174	163	4	
6,85	178,07	169,08	10,66	179,74
	183	176	18	
	174	162	4	
4,85	179,55	167,58	13,53	181,11
	186	173	20	
	175	159	7	
3,35	180,14	166,89	16,16	183,05
	185	173	24	
	176	160	10	
1,85	178,51	162,50	19,38	181,88
	185	170	25	
	173	155	14	
1,50	180,34	162,51	21,21	183,72
	186	170	33	
	174	154	15	
1,20	179,72	159,97	22,09	182,06
	185	170	30	
	176	151	15	
0,95	178,69	158,57	22,79	181,36
	185	165	33	
	174	148	15	
0,75	179,89	157,58	24,44	182,02
	186	165	34	
	175	150	14	
0,59	179,77	156,02	25,30	181,32
	185	164	32	
	175	144	17	
0,45	179,29	154,82	28,03	182,85
	185	162	42	
	172	147	20	
0,37	180,80	153,77	29,26	183,03
	187	163	41	
	176	145	20	
0,25	185,89	152,56	35,19	187,75
	191	161	45	
	180	142	25	
0,15	186,79	148,83	39,73	188,56
	192	164	55	
	180	134	29	
	2.705,30: 15			2.740,56: 15
Moyenne Générale:	180,35			182,70

* Moyenne des 100 mesures en μV.
† Maximum enregistré en μV parmi les 100 mesures.
‡ Minimum enregistré en μV parmi les 100 mesures.

y_+	y_{mm}	$T_p - T_{corrigé}$	T	ν (stokes)	θ_+	$\theta_{+\ corrigé}$
666	10,85	4,307	20°,782 C	0,99 10^{-2}	64,2	66,2
544	8,85	4,280			63,8	65,75
421	6,85	4,234^5			63,1	65,05
298	4,85	4,180		$\nu = 0{,}985.10^{-2}$ stokes	62,3	64,2
206	3,35	4,140		en moyenne	61,7	63,6
113,6	1,85	4,043^5	Différence:	pour le calcul de y_+	60,3	62,15
92,2	1,50	4,021	0°689 C		59,9^5	61,8
73,6	1,20	3,978			59,3	61,1
58,4	0,95	3,951^5			58,9	60,7
46	0,75	3,918^5			58,4	60,2
36,2	0,59	3,888^5			57,9^5	59,75
27,6	0,45	3,839			57,2	58,95
22,7	0,37	3,811			56,8	58,55
15,35	0,25	3,721^5			55,5	57,2
9,22	0,15	3,618	21,471°C	0,975 10^{-2}	53,9	55,55

$T_p - T_1 = 4°509$ C $\quad T_1 = 20°58$ C
$T_p = 25{,}089$C

Remarque: $\theta_{+\ corrigé}$ est obtenu en tenant compte de la perte d'énergie de 3 pour cent sur φ_0.

Série C

Caractéristiques de l'écoulement et du chauffage

Le débit: $q_v = 34$ l./s
Le flux: $\varphi_0 = 1{,}216$ W/cm²
Les propriétés physiques
à la paroi: $\mu_0 = 0{,}918.10^{-2}$ poises
$\nu_0 = 0{,}92.10^{-2}$ stokes
$\lambda_0 = 1{,}45.10^{-3}$ cgs
hors de la couche limite thermique:
$\mu_1 = 0{,}992.10^{-2}$
$\nu_1 = 0{,}995.10^{-2}$
$\lambda_1 = 1{,}433.10^{-3}$
La profondeur d'eau: 7,20 cm
Le diamètre hydraulique: 20,40 cm
La vitesse débitante: $U = 135$ cm/s
Le Nombre de Reynolds: $Re_0 = 299\,500$ à la paroi
$Re_1 = 276\,500$ hors de la c.l. therm.
$\Lambda = 0{,}0158$
$u_* = 6$ cm/s

Le Nombre de Prandtl: $Pr_0 = 6{,}33$ à la paroi
$Pr_1 = 6{,}92$ hors de la c.l. therm.

$T_1 = 20°40\,C$ Plaque 1: 2477 W au début des mesures
2: 2480
3: 2487
4: 2535
5: 2545

$T_1 = 20°56$ C Plaque 1: 2467 W à la fin des mesures
2: 2491
3: 2498
4: 2549
5: 2557

$T_p - T_1 = 3°334$ C

y_{mm}	(1) $T_p - T_1$	(2) $T_p - T$	(3) $T - T_1$	(2) + (3)
10.98	132.35*	122,99*	14,39*	137.38
	138†	130†	20†	
	128‡	118‡	11‡	
8,98	133,71	122,77	15,81	138,58
	137	127	23	
	130	116	12	
6,98	133.35	121,20	16,46	137,66
	136	126	22	
	130	116	12	
4,98	132,63	118,84	17,95	136,79
	137	123	24	
	130	113	13	
3,48	133,69	118,12	20,11	138,23
	138	125	28	
	131	112	15	
1,98	133,20	115,30	22,52	137,82
	138	123	28	
	130	107	18	
1.37	134,37	114,60	24,63	139,23
	139	123	31	
	130	109	19	
0.98	134,25	113,20	25,94	139,14
	138	120	33	
	130	108	20	
0,68	133,88	111,60	26,92	138,52
	138	117	33	
	131	105	21	
0,38	133,01	108,05	29,49	137,54
	138	115	37	
	130	100	23	
0,18	133,07	103,72	33,50	137,22
	137	111	43	
	131	96	28	
0,08	132,88	68,16	70,32	138,48
	137	78	79	
	129	60	60	
	1.600.39: 12			1.656,59: 12
Moyenne Générale	133,37			138,05

* Moyenne de 100 mesures en μV.
† Maximum enregistré en μV parmi les 100 mesures.
‡ Minimum enregistré en μV parmi les 100 mesures.

y_+	y_{mm}	$T_p - T_{corrigé}$	T	ν (stokes)	θ_+	$\theta_{+\,corrigé}$†
670	10,98	$3{,}024^{5}$	20°87 C	0,99 10^{-2}	62,25	64,2
547	8,98	3,004			61,8	63,7
425	6,98	$2{,}976^{5}$			61,25	63,15
303	4,98	2,928			60,3	62,15
212	3,48	2,892	Différence: 0,48 C	$\nu = 0{,}985 \cdot 10^{-2}$ stokes en moyenne pour le calcul de y_+	59,5	61,35
120,5	1,98	2,827			58,2	60,
83,5	1,37	2,792			57,45	59,2
59,7	0,98	2,758			56,8	58,55
41,4	0,68	$2{,}725^{5}$			56,1	57,85
23,15	0,38	2,649			54,55	56,2
10,96	0,18	2,545	21,35 C	0,98 10^{-2}	52,4	54,1
	0.08*	1,640	22,25 C	0,96 10^{-2}	33,77	34,8

$T_p - T_1 = 3{,}334$ C $\quad T_1 = 20{,}56$ C

$T_0 = 23{,}894$ C

* C'est le dernier point de mesure tout près de la paroi chauffante, sa cote ne saurait être considérée comme très précise.

† $\theta_{+\,corrigé}$ est obtenu en tenant compte de la perte d'énergie de 3 pour cent sur φ_0.

EXPERIMENTAL DETERMINATION OF THE TURBULENT PRANDTL NUMBER NEAR A SMOOTH WALL

Abstract—Further measurements were proceeded to obtain experimentally the mean temperature profiles close to the heated smooth wall, in the turbulent flow of water. An improved equipment (voltmeter of sensibility $\pm 1\mu$V and rapid recording at regular intervals) was used, and the results are statistically sure.

They confirm the semi-logarithmic law of temperature distribution with the coefficient A_θ less than that (A) obtained for the velocity distribution.

Hence, $Pr_t = A_\theta/A$ is equal to about 0,885.

In addition, the results show that the intermittent zone of turbulent thermal boundary layer extend very near the wall ($y < 10$ mm).

EXPERIMENTELLE BESTIMMUNG DER TURBULENTEN PRANDTL-ZAHL IN DER NÄHE EINER GLATTEN WAND

Zusammenfassung—Es wurden weitere Messungen durchgeführt, um experimentell die mittleren Temperaturprofile in der Nähe einer beheizten glatten Wand bei turbulenter Strömung von Wasser zu erhalten. Dabei wurden mit einer verfeinerten Messausrüstung (Voltmeter mit einer Empfindlichkeit von $\pm 1\mu$ V und Schnellaufzeichnung in regelmässigen Intervallen) gearbeitet; die Ergebnisse sind statistisch zuverlässig.

Sie bestätigen das halb-logarithmische Gesetz der Temperaturteilung mit den Koeffizienten A_θ kleiner als dem bei der Geschwindigkeitsverteilung erhaltenen A. Daraus folgt, dass $Pr = A_\theta/A$ ungefähr 0,885 beträgt.

Zusätzlich zeigen die Ergebnisse, dass sich die gestörte Zone der turbulenten thermischen Grenzschicht sehr nahe der Wand befindet ($y < 10$ mm).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ЧИСЛА ПРАНДТЛЯ ВБЛИЗИ ГЛАДКОЙ СТЕНКИ

Аннотация—Проведено экспериментальное измерение профилей средней температуры вблизи нагретой гладкой стенки в турбулентном потоке воды. Для этой цели использовалось усовершенствованное оборудование (вольтметр с чувствительностью $\pm 1\ \mu$V и быстрой записью через равные интервалы). Полученные результаты оказались статически верными.

Они подтверждают полулогарифмический закон распределения температуры,

причем коэффициент A_θ меньше аналогичного коэффициента A, полученного для распределения скорости. Следовательно, $Pr_t = A_\theta/A$ приблизительно равно 0,885. Кроме того, результаты показывают, что зона перемежаемости турбулентного теплового пограничного слоя очень близко подходит к стенке ($y < 10$ мм).